

## Моделирование состояния тепловыделяющих элементов

М. А. Артемов, email: artemov\_m\_a@mail.ru

Ю. Н. Бабкина, Е. С. Барановский,

Р. Г. Меджидов, Д. И. Соломатин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

**Аннотация.** *Выполнено компьютерное моделирование термоупругопластического состояния цилиндрической трубы с тепловыделяющим внутренним элементом. Расчеты выполнены в рамках теории малых упругопластических деформаций для гладких функций пластичности. Учитывается упругая и пластическая сжимаемость. Результаты вычислений представлены в виде графиков напряжений, деформаций и перемещений.*

**Ключевые слова:** *нелинейное условие пластичности, ассоциированный закон пластического деформирования, температурная зависимость параметров материала, теория малых деформаций, сжимаемое упругопластическое тело.*

### Введение

В последние годы существенно возрос интерес к решению термоупругопластических задач, что обусловлено существенным влиянием температуры на процесс выполнения ряда технологических операций. В большинстве научных статей учитывается температурная зависимость только некоторых параметров материалов, например, предела пластичности [1-9].

Учет температурной зависимости упругих параметров материала [10,11], а также выбор нелинейных функций пластичности [12], в основном, требует численного решения задач.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается составной цилиндр, состоящий из внутреннего цилиндра радиуса  $a$  и внешнего радиусов  $a, b$  ( $b > a$ ). Внутренний цилиндр нагрет до температуры  $t_a$ . На границе  $\rho = b$  поддерживается постоянная температура  $t_b$  и задано давление  $p_b$ . Оба цилиндра имеют одинаковые термомеханические свойства. Необходимо найти поля напряжений, деформаций и перемещений. Для решения задачи

выбирается цилиндрическая система координат  $\rho, \theta, z$ , ось  $z$  которой направлена по оси симметрии цилиндра. На границе  $\rho = b$

$$\sigma_{\rho} |_{\rho=b} = -p_b,$$

$$T |_{\rho=b} = T_b.$$

Все параметры материала зависят от температуры

$$E = E(T), \quad \nu = \nu(T), \quad k = k(T), \quad \alpha = \alpha(T), \quad \kappa = \kappa(T)$$

Принимаются теория малых деформаций и гипотеза естественного состояния. Рассматривается случай плоского деформированного состояния. Для определенности рассматривается следующая аппроксимация параметров материала

$$E = E_0(1 - \delta E \cdot T^2), \quad \nu = \nu_0(1 + \delta \gamma \cdot T), \quad k = k_0(1 - \delta k \cdot T^2),$$

$$\alpha = \alpha_0(1 + \delta \alpha \cdot T), \quad \kappa = \kappa_0(1 + \delta \kappa \cdot T).$$

## 2. Безразмерные величины

Все величины приводятся к безразмерному виду. В качестве характерного масштаба напряжений принимается значение предела пластичности на одноосное растяжение. За масштаб длины выбирается значение внешнего радиуса трубы. Масштабная единица измерения температуры равна  $1^\circ\text{C}$ . Для малых деформации определяются величины  $\delta$ , где  $\delta$  — безразмерный модуль Юнга. Для удобочитаемости формул все безразмерные и размерные величины имеют одинаковые обозначения.

## 3. Поле температур

Для рассматриваемых граничных условий стационарное поле температур определяется из решения уравнения

$$\frac{d}{d\rho} \left( \kappa \rho \frac{dT}{d\rho} \right) = 0 \tag{1}$$

При выборе линейной зависимости коэффициента температурного расширения от температуры уравнение имеет аналитическое решение. Поскольку уравнение (1) имеет не единственное решение, то нужное решение выбираем с учетом заданных граничных условий

$$T = \begin{cases} T_a, & 0 \leq \rho \leq b \\ 1 - \frac{\sqrt{1 + 2\delta\kappa(C_1 \ln(\rho) + 2C_2)}}{\delta\kappa}, & a \leq \rho \leq b. \end{cases}$$

где

$$C_1 = \frac{2(T_b - T_a) + \delta\kappa(T_a^2 - T_b^2)}{2 \ln(a/b)},$$

$$C_2 = \frac{T_a(2 - \delta\kappa T_a) \ln(b) - T_b(2 - \delta\kappa T_b) \ln(a)}{2 \ln(a/b)}.$$

Если коэффициент температурного расширения  $\kappa = const$ , то

$$T = \begin{cases} T_a, & 0 \leq \rho \leq b \\ T = \frac{T_a \ln(\rho/b) - T_b \ln(\rho/a)}{\ln(a/b)}, & a \leq \rho \leq b. \end{cases}$$

#### 4. Основные соотношения

Для рассматриваемой осесимметричной задачи уравнение равновесия запишем в виде

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta = 0. \quad (2)$$

В случае плоского деформированного состояния соотношения Коши, определяющие деформации через перемещения, имеют вид

$$\varepsilon_\rho = \frac{du_\rho}{d\rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_z = 0. \quad (3)$$

Перемещения удовлетворяют условию совместности деформаций

$$\rho \frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0. \quad (4)$$

Если учитывается тепловое воздействие, то упругие деформации связаны с напряжениями линейными соотношениями Дюамеля-Неймана

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\rho^e &= \sigma_\rho - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z) + E\alpha T, \\ E\varepsilon_\theta^e &= \sigma_\theta - \nu(\sigma_\rho + \sigma_z) + E\alpha T, \\ E\varepsilon_z^e &= \sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_\rho) + E\alpha T, \end{aligned} \quad (5)$$

Если изначально в упругой области необратимых деформаций нет, то упругие деформации являются полными и, в случае плоской деформации,

$$\varepsilon_z^e = 0 \quad (6)$$

Из третьего равенства (5), учитывая (6), следует, что

$$\sigma_z = \nu(\sigma_\theta + \sigma_\rho) - E\alpha T.$$

## 5. В области с однородным полем температур

Если область  $0 \leq \rho \leq a$  находится в упругом состоянии, то из уравнения равновесия (3) следует, что

$$E = E_0(1 - \delta_E T^2), \quad \nu = \nu_0(1 + \delta_\nu T), \quad \alpha = \alpha_0(1 + \delta_\alpha T), \quad k = k_0(1 - \delta_k T^2). \quad (7)$$

где  $p_a$  – давление на границе  $\rho = a$ . Из соотношений Дюамеля-Неймана, учитывая (2) и (7), получаем

$$E = E_0(1 - \delta_E T^2), \quad \nu = \nu_0(1 + \delta_\nu T), \quad \alpha = \alpha_0(1 + \delta_\alpha T), \quad k = k_0(1 - \delta_k T^2). \quad (8)$$

## 6. Упругая область

Подставив деформаций из соотношений закона Дюамеля-Неймана (6) в условия совместности деформаций (3) и, учитывая уравнение равновесия (2), получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно радиальной компоненты тензора напряжений

$$\frac{d^2 \sigma_\rho}{d\rho^2} + S_1 \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} - S_2 \sigma_\rho + S_3 = 0 \quad (9)$$

где

$$S_1 = \frac{3}{\rho} - \frac{1}{1 - \nu^2} \frac{d^2 \nu}{d\rho^2}, \quad S_2 = \frac{1 + 4\nu}{(1 - \nu^2)\rho} \frac{d\nu}{d\rho},$$
$$S_3 = \frac{E\alpha T}{(1 - \nu^2)\rho} \frac{d\nu}{d\rho} + \frac{1}{(1 - \nu)\rho} \frac{dE\alpha T}{d\rho}.$$

В упругой области определение всех компонентов напряжений, деформаций и перемещений связано с решением системы (2) – (5), (7) – (9).

## 7. Эквивалентное напряжение

Для оценки напряженного состояния в упругом теле вводится эквивалентное напряжение. При изменении значения внешних параметров (параметров нагрузки), характеризующих внешнее воздействие на рассматриваемый объект, задание эквивалентного напряжения, позволяет рассматривать процесс нагружения, нейтрального нагружения и разгрузки в каждой точке упругой области.

Для упругопластического тела в качестве эквивалентного напряжения в упругой области естественно выбрать функцию пластичности.

## 8. Условие пластичности

Предлагаемый алгоритм решения задачи допускает выбор любого условия пластичности идеального упругопластического тела. Для

определенности, в качестве примера рассматривается однородная функция пластичности:

$$F = \frac{\left( (\sigma_\theta - \sigma_\rho)^{2n} + (\sigma_\theta - \sigma_z)^{2n} + (\sigma_z - \sigma_\rho)^{2n} \right)^{\frac{1}{n}} + \xi (\sigma_\theta + \sigma_\rho + \sigma_z)^2}{\xi + 2} - k^2$$

### 9. Пластическая область

В пластической области деформации определяются суммой упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\rho^p, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p. \quad (10)$$

Упругие деформации определяются через напряжения согласно закону Дюамеля-Неймана (5).

Согласно ассоциированному закону пластического деформирования [8] пластические деформации связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta^p &= \frac{\partial F / \partial \sigma_\theta}{\partial F / \partial \sigma_z} \varepsilon_z^p, \\ \varepsilon_\theta^p &= \frac{\partial F / \partial \sigma_\theta}{\partial F / \partial \sigma_z} \varepsilon_z^p, \end{aligned} \quad (11)$$

Из равенства  $\varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p = 0$  и соотношений закона Дюамеля-Неймана следует, что

$$\varepsilon_z^p = -\sigma_z + \nu(\sigma_\theta + \sigma_\rho) - E\alpha T.$$

Когда область  $0 \leq \rho \leq a$  находится в пластическом состоянии, то также выполняется равенство (7), а осевое напряжение находится из условия пластичности

$$F(\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z) = 0 \Rightarrow \sigma_z = f(p_a, T a).$$

Перемещения определяются по формуле

$$u = \rho \varepsilon_\theta \quad (12)$$

Радиус упругопластической границы можно определять, рассматривая разные варианты непрерывности искомых величин на упругопластической границе.

Приведенные соотношения с учетом выбранных граничных условий и условий непрерывности напряжений и перемещений на упругопластической границе позволяют получить численное решение задачи. Можно рассматривать разные алгоритмы решения задачи, но выбор конкретного не является принципиальным моментом численного решения задачи.

## 10. Алгоритм решения задачи

В центре цилиндра из условия симметрии следует, что

$$\sigma_{\rho} |_{\rho=0} = \sigma_{\theta} |_{\rho=0}.$$

На границе  $\rho = a$  давление  $p_a$  — неизвестная величина, которая определяется в ходе решения задачи из условия непрерывности радиального напряжения.

Если в области  $0 \leq \rho \leq a$  и в области  $a \leq \rho \leq b$  все параметры материала имеют одинаковые значения, то будут выполняться условия непрерывности всех компонентов тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений на границе  $\rho = a$

$$\begin{aligned} [\sigma_{\rho}] |_{\rho=a} &= [\sigma_{\theta}] |_{\rho=a} = [\sigma_z] |_{\rho=a} = 0, \\ [\varepsilon_{\rho}] |_{\rho=a} &= [\varepsilon_{\theta}] |_{\rho=a} = [\varepsilon_z] |_{\rho=a} = 0, \\ [u_{\rho}] |_{\rho=a} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В случае, когда в указанных областях параметры материала принимают разные значения будут выполняться только следующие условия

$$[\sigma_{\rho}] |_{\rho=a} = [\varepsilon_{\theta}] |_{\rho=a} = [u_{\rho}] |_{\rho=a} = 0. \quad (14)$$

Для некоторых частных случаев, например, когда параметры материала не зависят от радиальной координаты, температура нагревателя  $T_a = T_0$ , при которой область  $0 \leq \rho \leq a$  переходит в пластическое состояние определяется аналитически из условия пластичности. В общем случае значение  $T_0$  определяется численно. При выполнении условия  $T_a > T_0$  область  $0 \leq \rho \leq a$  переходит в пластическое состояния, а область  $c \leq \rho \leq b$  остается в упругом состоянии.

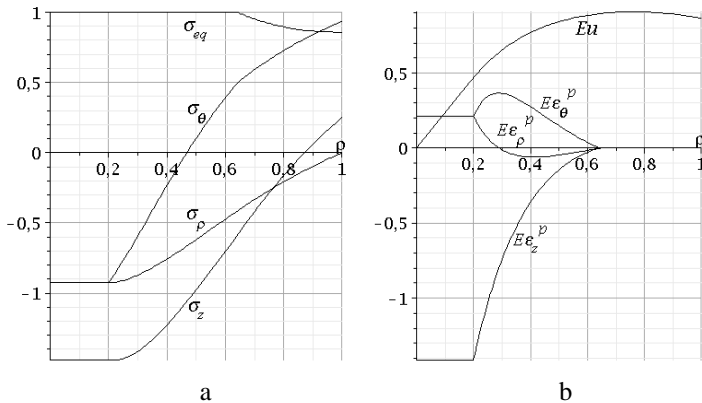
Решение уравнения (9) для радиального напряжения находится численно. На упругопластической границе, радиус которой определяется в ходе решения задачи, должно выполняться условие для эквивалентного напряжения  $\sigma_{eq} |_{\rho=c} = 1$ . Когда на границе  $\rho = b$  задано давление, то  $\sigma_{\rho} |_{\rho=b} = -p_b$ . Остальные искомые величины в упругой области вычисляются по приведенным выше соотношениям.

В области пластического состояния искомые величины определяются из решения системы уравнений, которая включает уравнение равновесия (2), условие пластичности  $F = 0$ , соотношения ассоциированного закона деформирования (8), условия совместности

деформаций (4), соотношения Дюамеля-Неймана для упругих деформаций (5), соотношения связи полных упругих и пластических деформаций (10) и выполняемых условий непрерывности (13) или (14) на упругопластической границе и на границе  $\rho = a$ .

### 11. Результаты численного решения задачи

На рисунке показаны графики напряжений, пластических деформаций и перемещений для разных значений параметров материала и температуры. В расчетах принималось, что  $E_0 = 517.5$ .



a) компоненты тензора напряжений, b) компоненты тензора пластических деформаций и радиальных перемещений

Рисунок. Графики

### 12. Принятые обозначения

$0 \rho \theta z$  – цилиндрическая система координат,

$b$  – внешний радиус цилиндра,

$a$  – внешний радиус цилиндра,

$E$  – модуль Юнга,

$\nu$  – коэффициент Пуассона,

$\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения,

$\kappa$  – коэффициент теплопроводности,

$k$  – предел пластичности,

$T$  – температура,

$p_a, T_a$  – давление и температура на границе  $\rho = a$ ,

$p_b, T_b$  – давление и температура на границе  $\rho = b$ ,

$\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z$ , – компоненты тензора напряжений,

$\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ , – компоненты тензора деформаций,

$\varepsilon_\rho^p, \varepsilon_\theta^p, \varepsilon_z^p$ , – компоненты тензора пластических деформаций,

$u$  – радиальная компонента вектора перемещений.

### Заключение

Предложенный алгоритм решения задачи позволяет выполнять расчеты при выборе любых функций и любой аппроксимации параметров материала, когда учитывается их зависимость от температуры.

### Литература

1. Orcan, Y. Elastic-plastic deformation of a centrally heated cylinder / Y. Orcan, U. Gamer // *Acta Mechanica*. – 1991. – Vol. 90. – P. 61–80.
2. Mack, W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft / W. Mack // *Arch. Appl. Mech.* – 1993. – Vol. 63. – P. 42–50.
3. Eraslan, A. Computation of transient thermal stresses in elastic-plastic tubes: Effect of coupling and temperature dependent physical properties / A. Eraslan, Y. Orcan // *Journal of Thermal Stresses*.—2002. – Vol. 25. – P. 559–572.
4. Eraslan, A. Thermal stresses in elastic-plastic tubes with temperaturedependent mechanical and thermal properties / A. Eraslan, Y. Orcan // *Journal of Thermal Stresses*. – 2001. – Vol. 24. – P. 1097–1113.
5. Eraslan, A. N. The strain hardening rotating hollow shaft subject to a positive temperature gradient / A. N. Eraslan, E. Arslan, W. Mack // *Acta Mech.* – 2007. – Vol.194. – P. 191–211.
6. Пластическое течение и разгрузка полого цилиндра в процессе «нагрева-охлаждения». / А. А. Буренин, Е. П. Дац, С.Н. Мокрин, Е. В. Мурашкин // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева*. Серия: Механика предельного состояния. – 2013— № 2. – С. 22–28.
7. Дац, Е. П. Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учете пластических течений / Е. П. Дац, А. В. Ткачева // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2016. – Т. 57, № 3. – С. 208–216.
8. Dats, E. On unsteady heat effect in center of the elastic-plastic disk / E. Dats, E. Murashkin // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. – 2016.— Vol. 2223.—P. 69–72.



9. Dats, E. Calculation of the residual stress field of the thin circular plate under unsteady thermal action / E. Dats, S. Mokrin, E. Murashkin // *Key Engineering Materials*. – 2016. – Vol. 685. – P. 37–41.

10. Jahanian, S. Thermoelastoplastic and residual stresses in a hollow cylinder with temperature-dependent properties / S. Jahanian, M. Sabbaghian // *J. Press. Vessel Techn.* – 1990. – V. 112. – P. 85–91.

11. Orcan, Y., Eraslan, A. N.: Thermal stresses in elastic-plastic tubes with temperature-dependent mechanical and thermal properties / Y. Orcan, A. N. Eraslan // *J. Thermal Stresses*. – 2001. – Vol. 24. – P. 1097–1113.

12. Semka, E. V. Mathematical modeling of rotating disk states / E V Semka, M A Artemov, Y N Babkina, E S Baranovskii and A I Shashkin // Published under licence by IOP Publishing Ltd *Journal of Physics: Conference Series, Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems* 11-13 November 2019. –Voronezh, Russian Federation – 2020. – V. 1479. – DOI:10.1088/1742-6596/1479/1/012122